

De transformatie van Vekua

G.W. Veltkamp

1. Het hyperbolische randwaarde-probleem

$$4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - k^2 \Phi = 0 \text{ voor } x > 0, y > 0,$$

$$\Phi(x, 0) = \Psi(x) \text{ voor } x > 0,$$

$$\Phi(0, y) = \Psi(0) \text{ voor } y > 0$$

(met continue $\Phi(x)$)

heeft als oplossing (te verkrijgen m.b.v. integratie-methode van Riemann of met Laplace-transformatie)

$$\Phi(x, y) = \Psi(x) - \int_0^x \Psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} I_0(k\sqrt{(x-\xi)y}) d\xi. \quad (1)$$

2. Zij $\Psi(z)$ een analytische functie van z in een zeker gebied D dat de oorsprong bevat.

Dan voldoet voor z in D en w willekeurig complex

$$\Phi(z, w) = \Psi(z) - \int^z \Psi(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} I_0(k\sqrt{(z-\zeta)w}) d\zeta \quad (2)$$

(integratiweg willekeurig in D)

aan de vergelijking

$$4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial w} - k^2 \Phi = 0 \quad (3)$$

Zij nu $z=x+iy$, $w=\bar{z}=x-iy$.

Dan luidt (2)

$$\Phi(z, \bar{z}) = \Psi(z) - \int_0^z \Psi(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} I_0(k\sqrt{(z-\zeta)\bar{z}}) d\zeta, \quad (4)$$

en Φ , opgevat als functie van x en y voldoet aan

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi = 0 \quad (5)$$

(Φ is in het algemeen "complex-valued").

Zij D stergebied t.o.v. de oorsprong, en zij

$$\operatorname{Re} \Phi(z, \bar{z}) = F(x, y)$$

$$\operatorname{Re} \Psi(z) = G(x, y)$$

Dan is $G(x, y)$ harmonisch en $F(x, y)$ voldoet aan (5), terwijl uit (4) volgt

$$F(x, y) = G(x, y) - \int_0^1 G(tx, ty) \frac{\partial}{\partial t} I_0(kr\sqrt{1-t}) dt \quad (6)$$

met $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$L_q \cdot g = (1 - k^2/4q^2) L_s \cdot f.$$

En dezelfde relatie blijkt uit (8) te volgen. Waarmee, aangezien f en g continu zijn, bewezen is, dat de in (8) gegeven transformatie de omkering is van die uit (7).

Opmerking. Daar I_0 een even en J_1 een oneven functie van z 'n argument is, zijn alle wortelvormen slechts schijn. De integraalkernen in (7) en (8) zijn gehele functies van r en ϱ en k^2 .

4. Zij $f(r, \varphi)$ gedefinieerd voor $0 < r < \infty$, $\theta_1 < \varphi < \theta_2$ en exponentieel begrensd voor $r \rightarrow \infty$. Zij k een complex getal. Definieer de operator M_k door

$$\begin{aligned} M_k \cdot f &\stackrel{\text{def}}{=} (q - k^2/4q) L_{q+k^2/4q} \cdot f = \\ &= (q - k^2/4q) \int_0^\infty e^{-r(q+k^2/4q)} f(r, \varphi) dr \end{aligned} \quad (13)$$

(hierin ligt q in een zeker gebied van het complexe q -vlak, zodanig dat de integraal convergeert. Dit gebied bevat zeker een naar rechts onbegrensd deel van de reële as).

Vergelijking (12) kan dan geschreven worden als

$$M_0 \cdot g = M_k \cdot f,$$

zodat de door (7) gegeven transformatie van Vekua geschreven kan worden als

$$f = V_k g \text{ met } V_k \stackrel{\text{def}}{=} M_k^{-1} \cdot M_0 \quad (14)$$

Stelling. Onder milde restricties betreffende de toelaatbare functies $f(r, \varphi)$ geldt

$$\left\{ \left(q \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \cdot M_k = M_k \cdot \left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - k^2 r^2 \right\}. \quad (15)$$

Gevolg: Voor de transformatie van Vekua geldt

$$\left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - k^2 r^2 \right\} \cdot V_k = V_k \cdot \left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}.$$

Opmerking. Een door PETERS aangegeven transformatie luidt

$$P_k \cdot f(r, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} k \operatorname{sh} p \int_0^\infty e^{-kr} \operatorname{ch} p f(r, \varphi) dr.$$

Hiervoor geldt dus

$$P_k = [M_k]_{q=\frac{1}{2}k e^p}$$

Uit (15) volgt dan (daar uit $q=\frac{1}{2}k e^p$ volgt $q \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p}$)

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \cdot P_k = P_k \left\{ \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - k^2 r^2 \right\}.$$

5. Stelling. Er geldt

$$M_k \cdot r \frac{\partial}{\partial r} = -q \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{q^{2+k^2/4}}{q^{2-k^2/4}} M_k. \quad (16)$$

Dus speciaal $M_0 \cdot r \frac{\partial}{\partial r} = -q \frac{\partial}{\partial q} M_0$.

Gevolg: Er geldt

$$V_k^{-1} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} V_k = r \frac{\partial}{\partial r} - U_k,$$

waarin U_k gedefinieerd is door

$$U \cdot g(r, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} k^2 r \int_0^r \text{ch } \frac{1}{2} k(r-\rho) g(\rho, \varphi) d\rho.$$

Bewijs. Uit (14) en (16) volgt

$$\begin{aligned} V_k^{-1} r \frac{\partial}{\partial r} V_k &= M_0^{-1} M_k r \frac{\partial}{\partial r} M_k^{-1} M_0 = \\ &= -M_0^{-1} q \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{q^{2+k^2/4}}{q^{2-k^2/4}} M_0 = r \frac{\partial}{\partial r} \cdot M_0^{-1} \left\{ 1 + \frac{k^2/2}{q^{2+k^2/4}} \right\} M_0 = \\ &= r \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} L_q^{-1} \cdot \frac{k^2/2}{q^{2+k^2/4}} L_q \end{aligned}$$

(daar $M_0 = q L_q$, $M_0^{-1} = L_q^{-1} q^{-1}$).

Nu is $L_q^{-1} \frac{k^2/4}{q^{2+k^2/4}} = k \text{ sh } \frac{1}{2} kr$.

Dus $r \frac{\partial}{\partial r} L_q^{-1} \frac{k^2/2}{q^{2+k^2/4}} L_q \cdot g = kr \frac{\partial}{\partial r} (g * \text{sh } \frac{1}{2} kr) =$

$$= \frac{1}{2} kr^2 \int_0^r \text{ch } \frac{1}{2} k(r-\rho) \cdot g(\rho, \varphi) d\rho = U_k \cdot g, \quad \text{q.e.d.}$$

Gevolg: Voldoet de functie $f(r, \varphi)$ voor $\varphi = \theta_j$ ($j=1,2$) aan de randvoorwaarden

$$\cos \mu_j r \frac{\partial f}{\partial r} - \sin \mu_j \frac{\partial f}{\partial \varphi} = h_j(r), \quad j=1,2$$

dan voldoet de functie $g(r, \varphi) = V_k^{-1} \cdot f(r, \varphi)$ voor $\varphi = \theta_j$ aan de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} \cos \mu_j r \frac{\partial g}{\partial r} - \sin \mu_j \frac{\partial g}{\partial \varphi} &= \cos \mu_j \cdot \frac{1}{2} k^2 r \int_0^r \text{ch } \frac{1}{2} k(r-\rho) g(\rho, \varphi_j) d\rho - \\ &= V_k^{-1} h_j \end{aligned}$$

(de operator $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ commuteert met V_k).